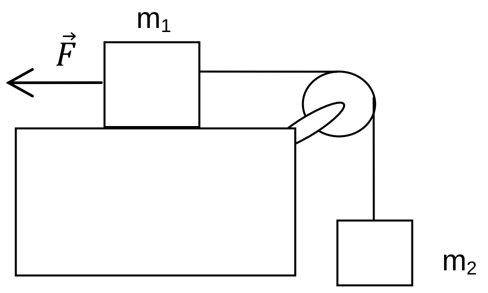
**Corso di Laurea in Matematica A.A. 2017/2018**

**Corso di Fisica Generale 1**

**Prova scritta del 01/06/2018 (Secondo esonero)**

**Esercizio 1 (10 punti)**

Due particelle puntiformi di massa $m_1$=1 kg ed $m_2$=10 kg sono collegate tramite una fune (vedi figura). Sapendo che la forza $\vec{F}$ ha modulo 10 N, supponendo che il piano sia liscio, la corda priva di massa e inestensibile e la carrucola ideale, si determinino:




1) L'accelerazione delle due particelle;
2) Le tensioni e la forza normale;
3) Lo spostamento delle due particelle e le rispettive velocità dopo 1 s, supponendo che partano da ferme.

**Esercizio 2 (10 punti)**

Una particella puntiforme di massa m, inizialmente in quiete a contatto con una molla verticale di costante elastica k, viene lasciata libera di muoversi quando la molla è compressa di 10 cm. Basandosi su considerazioni energetiche si determinino:

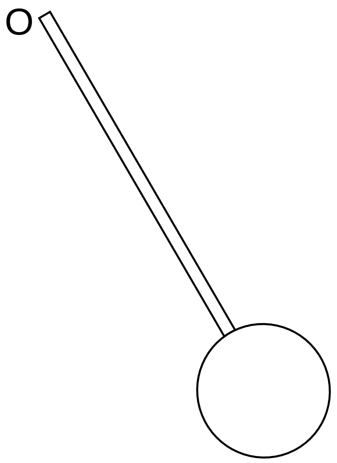
1) La velocità con cui la particella transita dal punto in cui la molla riacquista la lunghezza a riposo;
2) La quota massima raggiunta dalla particella (supponendo che si stacchi dalla molla quando questa recupera la lunghezza a riposo);
3) La velocità con cui la particella ricade sulla molla.
m=0.5 kg, k=200 N/m

**Esercizio 3 (10 punti)**

Un anello omogeneo di massa M e raggio R è poggiato su un piano scabro, inclinato di 15° rispetto all'orizzontale. Supponendo che il corpo sia inizialmente fermo quando il punto di contatto è a quota 1 m (rispetto al piano orizzontale) si determinino:
1) Il minimo coefficiente di attrito statico che consente il puro rotolamento;
2) La velocità del centro di massa e la velocità angolare di rotazione quando il punto di contatto raggiunge il piano orizzontale.
M=5.0 kg, R=25 cm.

**Esercizio 4 (10 punti)**

Un corpo rigido è costituito da una sbarretta rettilinea e omogenea, di lunghezza L e massa M, alla cui estremità inferiore è saldato un disco omogeneo, di massa m e raggio R. Il corpo è vincolato a ruotare senza attrito intorno ad un'asse orizzontale passante per l'estremo superiore della sbarretta (O in figura). Si determinino:

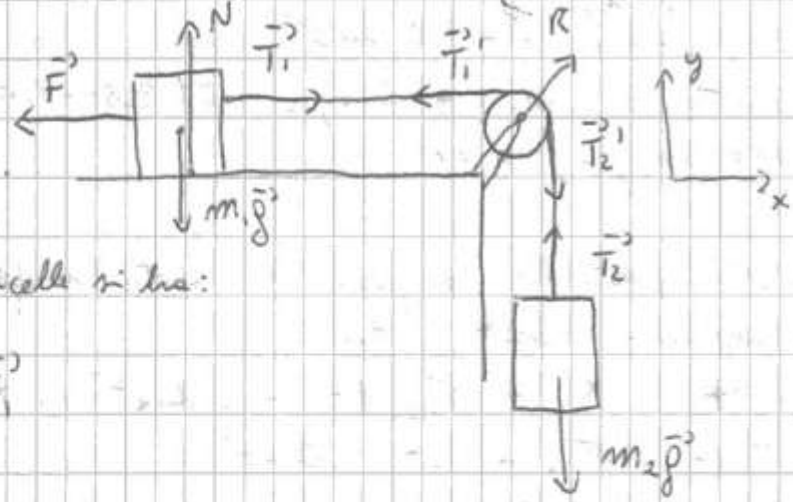



1) La distanza del centro di massa dall'asse di rotazione;
2) Il momento di inerzia del corpo rispetto all'asse di rotazione;
3) Il periodo delle piccole oscillazioni intorno alla posizione di equilibrio stabile;
L=50 cm, R=10 cm, M=1.0 kg, m=250 g.

# SOLUZIONE

## ESERCIZIO 1

1-2)




Le forze agenti sul sistema sono rappresentate in figura. Applicando la seconda legge di Newton alle due particelle si ha:

$$\begin{cases} m_1\vec a_1 = \vec F + m_1\vec g + \vec N + \vec T_1 \\ m_2\vec a_2 = m_2\vec g + \vec T_2 \end{cases}$$

Proiettando sugli assi in figura si ha:

$$\begin{cases} m_1 a_{1x} = -F + T_1 \\ m_1 a_{1y} = -m_1 g + N = 0 \quad \text{(perché la particella 1 non si muove lungo } y) \\ m_2 a_{2y} = -m_2 g + T_2 \end{cases}$$

Inoltre abbiamo $\vec T_1 = -\vec T_1'$ e $\vec T_2 = -\vec T_2'$ (corda priva di massa) e $T_1' = T_2'$ (carrucola priva di massa) da cui si ottiene $T_1 = T_2$

L'inestensibilità della corda lega gli spostamenti delle due particelle, in particolare si ha $\Delta x_1 = -\Delta y_2$ da cui si ottiene $a_{1x} = -a_{2y}$.

Il sistema completo è pertanto:

$$\begin{cases} m_1 a_{1x} = -F + T_1 \\ N = m_1 g \\ m_2 a_{2y} = -m_2 g + T_2 \\ T_1 = T_2 \\ a_{1x} = -a_{2y} \end{cases} \quad \text{risolvendo per } a_{1x} \text{ e } T_1 \text{ si ha} \quad \begin{cases} T_2 = T_1 \\ a_{2y} = -a_{1x} \\ m_2 a_{2y} = -m_2 a_{1x} = -m_2 g + T_1 \iff \\ \iff T_1 = -m_2 a_{1x} + m_2 g \\ m_1 a_{1x} = -F + T_1 = -F + m_2 g - m_2 a_{1x} \end{cases}$$

Dall'ultima equazione si ottiene

$$a_{1x} = \frac{m_2 g - F}{m_1 + m_2} = \frac{10 \cdot 9.81 - 10}{1 + 10} = \frac{88.1}{11} = 8.0\ \mathrm{m\,s^{-2}}$$

Pertanto

$$\begin{cases} a_{2y} = -a_{1x} = -8.0\ m s^{-2} \\ T_1 = T_2 = m_2(g - a_{1x}) = 10(9.81-8.0) = 18.1\ N \\ N = m_1 g = 9.8 N \end{cases}$$

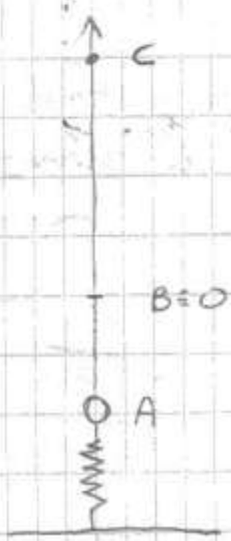
3) Le due particelle compiono un moto uniformemente accelerato con equazioni orarie $(t_0 = 0)$

$$\begin{cases} x_1(t) = x_{01} + v_{01x}(t + \frac{1}{2} a_{1x} t^2 = x_{01} + \frac{1}{2} a_{1x} t^2 \\ v_{1x}(t) = v_{01x} + a_{1x} t = a_{1x} t \\ y_2 = y_{02} + v_{02y} t + \frac{1}{2} a_{2y} t^2 = y_{02} + \frac{1}{2} a_{2y} t^2 \\ v_{2y}(t) = v_{02y} + a_{2y} t = a_{2y} t \end{cases}$$

Sostituendo i valori numerici e per $t_1 = 1s$ si ha

$$\begin{cases} x_1(t_1) - x_{01} = \frac{1}{2} a_{1x} t_1^2 = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 1^2 = 4.0m \\ v_{1x}(t_1) = a_{1x} t_1 = 8.0\ m s^{-1} \\ y_2(t_1) - y_{02} = \frac{1}{2} a_{2y} t_1^2 = -4.0m \\ v_{2y}(t_1) = a_{2y} t_1 = -8.0\ m s^{-1} \end{cases}$$

Esercizio 2




Durante il moto la particella è soggetta alla forza peso $m\vec{g}$ e, nel tratto AB (tra la posizione iniziale e la posizione in cui la molla riacquista la lunghezza di riposo) anche alla forza elastica $\vec{F_e}$.

Entrambe le forze sono conservative, pertanto l'energia meccanica resta costante durante il moto.

1) Uguagliando l'energia meccanica in A e in B si ha

$$E_A = E_B \iff \frac{1}{2} m v_A^2 + mgy_A + \frac{1}{2} k y_A^2 = \frac{1}{2} m v_B^2 + mgy_B + \frac{1}{2} k y_B^2$$

In cui la deformazione della molla $\Delta L$ è stata legata alla posizione della particella lungo l'asse di moto (asse y) notando che se si fissa l'origine nel punto B, in cui la molla è a riposo, si ha $\Delta L = y$

ponendo $v_A = 0$ e $y_B = 0$ si ottiene

$$mgy_A + \frac{1}{2} k y_A^2 = \frac{1}{2} m v_B^2 \iff v_B^2 = 2gy_A + \frac{k}{m} y_A^2 = -2 \cdot 9.81 \cdot 0.1 + \frac{200}{0.5}(0.1)^2 =$$

$$= -1.962 + 4 = 2.038 \iff v_B = 1.43\, m\, s^{-1} \implies \vec{v_B} = v_B \hat{y}$$

2) L'energia si conserva anche nel tratto BC, in cui la particella è soggetta alla sola forza peso, pertanto:

$\frac{1}{2} m v_B^2 + mgy_B = \frac{1}{2} m v_C^2 + mgy_C$ Inoltre nel punto di quota massima la velocità è nulla per cui si ha $\frac{1}{2} m v_B^2 = mgy_C \iff y_C = \frac{v_B^2}{2g} = 0.104\, m$

3) Dalla conservazione dell'energia meccanica si ricava immediatamente che il modulo della velocità con cui la particella torna nel punto B ($|\vec{v}_{B'}|$) è uguale a quello trovato nel punto 1.
Le due velocità hanno però verso opposto perché nel punto 1 la particella passa da B con velocità verso l'alto, mentre adesso ci arriva nella fase di caduta verso il basso.
$\vec{v}_{B'} = -v_B \hat{y}$

Dimostriamo che $\vec{v}_B$ e $\vec{v}_{B'}$ hanno modulo uguale confrontando l'energia meccanica in B quando la particella vi passa inizialmente ($E_B$) con l'energia meccanica quando la particella torna in B ($E_{B'}$)

$E_B = E_{B'} \iff \frac{1}{2} m v_B^2 + m g y_B = \frac{1}{2} m v_{B'}^2 + m g y_{B'}$

Dato che $y_B = y_{B'}$ si ha $\frac{1}{2} m v_B^2 = \frac{1}{2} m v_{B'}^2$, da cui si ha $v_B = v_{B'}$

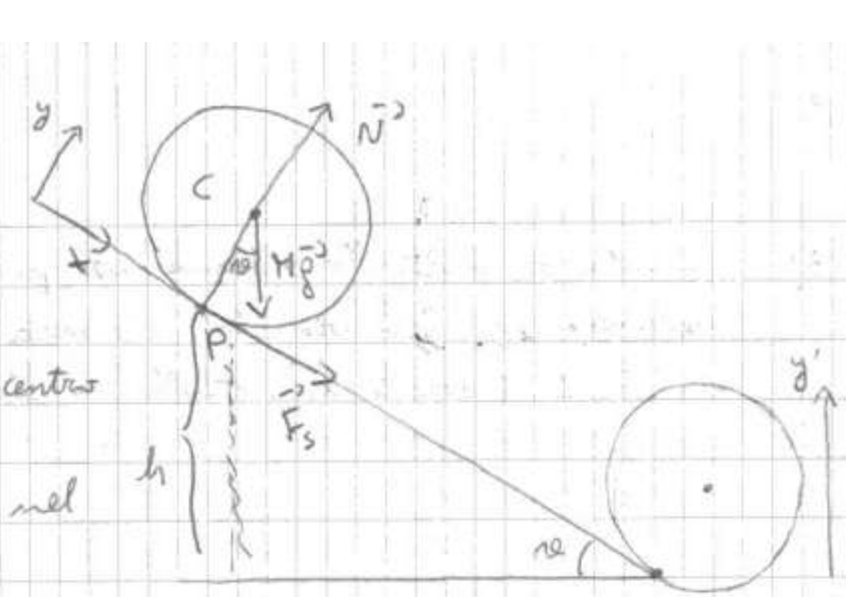
Esercizio 3

Le forze agenti sull' ~~disco~~ anello sono:

Il peso totale $M\vec{g}$ (applicato nel centro di massa C)

La forza normale $\vec{N}$, applicata nel punto di contatto P

L'attrito statico $\vec{F}_s$, applicato in P




Scrivendo le equazioni cardinali abbiamo

$$\begin{cases} M\vec{a}_{cm} = \vec{N} + M\vec{g} + \vec{F}_s \\ I_c \alpha_z = \tau^E_{c_z} \end{cases}$$

Il momento meccanico totale rispetto a C è

$$\vec{\tau}_c = \underbrace{\vec{CC} \times M\vec{g}}_{(\vec{\tau}_c \text{ forza peso})} + \underbrace{\vec{CP} \times \vec{N}}_{(\vec{\tau}_c \text{ della normale})} + \underbrace{\vec{CP} \times \vec{F}_s}_{(\vec{\tau}_c \text{ dell'attrito statico})} = R F_{sx} \hat{z}$$

Proiettando sugli assi in figura si ha $\vec{F}_s = F_{sx}\hat{x}$, $\vec{N} = N\hat{y}$, $M\vec{g} = Mg\,\text{sen}\,\theta\,\hat{x} - Mg\cos\theta\,\hat{y}$

$$\begin{cases} Ma_{cmx} = Mg\,\text{sen}\,\theta + F_{sx} \\ Ma_{cmy} = -Mg\cos\theta + N = 0 \iff N = Mg\cos\theta \\ I_c \alpha_z = F_{sx} R \end{cases}$$

Inoltre la condizione di puro rotolamento ($\vec{v}_P = \vec{0}$) consente di scrivere $\vec{v}_P = \vec{v}_{cm} + \vec{\omega} \times \vec{CP} = \vec{0}$ da cui si ottiene

$v_{cmx} = -\omega_z R$ e $a_{cmx} = -\alpha_z R$

$$\begin{cases} I_c \alpha_z = MR^2\left(-\frac{a_{cmx}}{R}\right) = F_{sx} R \iff -M\cancel{R}\, a_{cmx} = F_{sx}\cancel{R} \iff a_{cmx} = -\frac{F_{sx}}{M} \\ Ma_{cmx} = -F_{sx} = Mg\,\text{sen}\,\theta + F_{sx} \iff F_{sx} = -\frac{Mg\,\text{sen}\,\theta}{2} \end{cases}$$

Perché il valore trovato di $F_{Sx}$ sia permesso deve essere

$$|F_{Sx}| \le F_{S_{MAX}} = \mu_S N \iff \frac{mg \operatorname{sen}\vartheta}{2} \le \mu_S mg\cos\vartheta \iff \frac{\operatorname{tg}\vartheta}{2} \le \mu_S$$

Il minimo valore di $\mu_s$ è quindi $\mu_s = \frac{\operatorname{tg} 15^\circ}{2} = 0.134$

2) Durante il moto si conserva l'energia meccanica perché $m\vec{g}$ è conservativa, e $\vec{N}$ e $\vec{F_s}$ entrambe a lavoro nullo.

Chiamate $C_i$ e $C_f$ le posizioni iniziali e finali del centro di massa otteniamo

$$\frac{1}{2} m v_{cm_i}^2 + \frac{1}{2} I_c \omega_i^2 + mg y'_{c_i} = \frac{1}{2} m v_{cm_f}^2 + \frac{1}{2} I_c \omega_f^2 + mg y'_{c_f}$$

L'energia cinetica iniziale è nulla, dato che il corpo parte da fermo, e

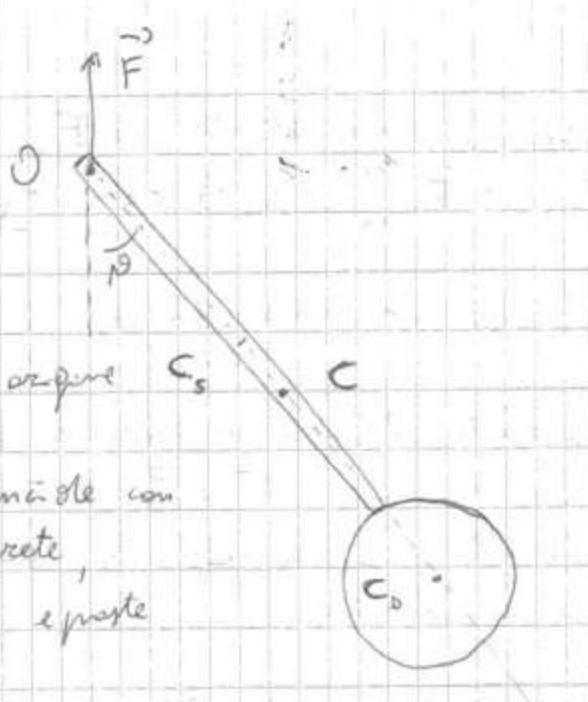
$y_{ci} - y_{cf} = h$. Inoltre $v_{cm_f} = \omega_f R$. Pertanto abbiamo

$$\frac{1}{2} M v_{cm_f}^2 + \frac{1}{2} I_c \omega_f^2 = mgh \iff \frac{1}{2} m v_{cm}^2 + \frac{1}{2} mR^2 \cdot \frac{v_{cm}^2}{R^2} = mgh \iff$$

$$\iff m v_{cm}^2 = mgh \iff v_{cm}^2 = gh \Rightarrow v_{cm} = \sqrt{gh} = 3.13\ \mathrm{m\,s^{-1}}$$

$$\omega_f = \frac{v_{cm_f}}{R} = \frac{3.13}{0.25} = 12.5\ \mathrm{rad\,s^{-1}}$$

Esercizio 4




1) La distanza del centro di massa dall'asse di rotazione si può calcolare fissando un asse x come in figura, con origine in O e ricordando che il centro di massa di due o più corpi rigidi coincide con quello di un sistema di particelle discrete, di massa pari a quella di ogni corpo, e poste nel rispettivo centro di massa.
Chiamato $C_s$ il centro di massa della sbarretta e $C_D$ quello del disco (entrambi al centro dei due corpi perché simmetrici e omogenei) si ha

$$x_{C_S} = \frac{L}{2} \qquad x_{C_D} = L + R \qquad e$$

$$x_C = \frac{M x_{C_S} + m x_{C_D}}{M+m} = \frac{M\left(\frac{L}{2}\right) + m\left(\frac{L}{2}+R\right)}{M+m} = \frac{1 \cdot 0.25 + 0.25 \cdot 0.6}{1.25} = 0.32 \text{ m}$$

2) Il momento d'inerzia è una grandezza additiva, per cui

$$I_O = I_{O_S} + I_{O_D} = \frac{ML^2}{3} + \left[\frac{mR^2}{2} + m(L+R)^2\right] =$$

$$= 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{1}{3} + \left[\frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^2 \frac{1}{2} + \frac{1}{4}(0.6)^2\right] = 0.174 \text{ kg m}^2$$

3) Sul corpo agiscono il peso totale applicato in C, e la forza vincolare in O. Il moto è dato dalla soluzione dell'equazione

$$I_O \alpha_z = \tau_{O_z}^{e}$$

$$\vec{\tau}_o = \underbrace{\vec{OO}}_{=0} \times \vec{F} + \vec{OC} \times (M+m)\vec{g} = -x_{cM}(M+m)g \operatorname{sen}\vartheta \, \hat{z}$$

Pertanto si ha $\quad I_o \alpha_z = I_o \dfrac{d^2\vartheta}{dt^2} = -(M+m)\,g\,x_{cM} \operatorname{sen}\vartheta$

Per piccole oscillazioni il moto è armonico con pulsazione

$$\omega_o = \sqrt{\frac{(M+m)g\,x_{cM}}{I_o}}$$

Il periodo del moto è $\quad T = \dfrac{2\pi}{\omega_o} = 2\pi \sqrt{\dfrac{I_o}{(M+m)\,g\,x_{cM}}} =$

$$= 2\pi \cdot \sqrt{\frac{0.174}{1.25 \cdot 9.81 \cdot 0.32}} = 1.33 \text{ s}$$