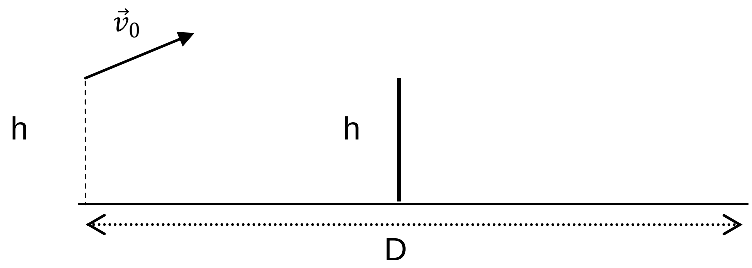
Corso di Laurea in Matematica
A.A. 2017/2018
Corso di Fisica Generale 1
Prova scritta del 27/04/2018 (Primo esonero)

Esercizio 1 (8 punti)

Dati i due vettori $\vec{V}_1 = 3\hat{x} + 5\hat{y} + \hat{z}$ e $\vec{V}_2 = 2\hat{x} + 3\hat{y} + 8\hat{z}$ si determinino: il modulo dei due vettori, il vettore somma, il modulo del vettore somma, il prodotto scalare $\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2$, l'angolo tra $\vec{V}_1$ e $\vec{V}_2$, il prodotto vettoriale $\vec{V}_1 \times \vec{V}_2$.

Esercizio 2 (12 punti)

Un pallavolista effettua la battuta dalla linea di fondocampo. Sapendo che il campo è lungo D=18 m, che la rete è alta h=2.43 m, supponendo che la quota di partenza coincida con l'altezza della rete e che l'attrito con l'aria sia trascurabile, si determinino:



a) la velocità minima che consente alla palla di superare la rete;
b) il punto in cui la palla, lanciata con la velocità minima, cade nel campo avversario;
c) la posizione in cui la quota è massima e l'istante in cui viene raggiunta;
d) il tempo di volo totale;
e) la velocità con cui la palla raggiunge terra.

Esercizio 3 (10 punti)

Una particella puntiforme si muore di moto circolare lungo una traiettoria di raggio R=2 m, con accelerazione angolare $\alpha_z = -5t^2 + 2t + 3$, con α_z in rad/s^2 e t in secondi. Supponendo che la particella parta da ferma quando l'angolo è nullo e t=0s si determinino:
a) la dipendenza dal tempo della velocità angolare;
b) la dipendenza dal tempo dell'angolo di rotazione;
c) la velocità angolare media nell' intervallo di tempo tra 0s e 2s.
d) l'accelerazione tangenziale e l'accelerazione centripeta in funzione del tempo
e) l'istante di tempo in cui l'accelerazione tangenziale si annulla.

Esercizio 4 (10 punti)

Una barca attraversa un fiume orientato da Sud a Nord, largo 2 km partendo da un punto A ad Ovest, per raggiungere un punto B sulla sponda opposta, ad Est. Il motore della barca le consente di muoversi con velocità, rispetto all'acqua, di 10 km/h. Supponendo che la corrente scorra da sud a nord con velocità rispetto a terra di 6 Km/h si determinino:
a) la velocità della barca rispetto a terra;
b) la direzione della velocità della barca rispetto all'acqua;
c) il tempo necessario per attraversare il fiume;
d) lo spostamento lungo la direzione della corrente nel riferimento solidale all'acqua.

SOLUZIONE

Esercizio n°1

$$\vec{V}_1 = 3\hat{x} + 5\hat{y} + \hat{z} \qquad \vec{V}_2 = 2\hat{x} + 3\hat{y} + 8\hat{z}$$

a) Modulo dei due vettori
Dato un vettore $\vec{V} = V_x\hat{x} + V_y\hat{y} + V_z\hat{z}$ si ha

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2} \quad \text{pertanto}$$

$$V_1 = \sqrt{3^2 + 5^2 + 1^2} = \sqrt{9 + 25 + 1} = \sqrt{35}$$

$$V_2 = \sqrt{2^2 + 3^2 + 8^2} = \sqrt{4 + 9 + 64} = \sqrt{77}$$

b) Il vettore somma ha per componenti la somma delle componenti omologhe degli addendi, pertanto:

$$\vec{V}_1 + \vec{V}_2 = (3+2)\hat{x} + (5+3)\hat{y} + (1+8)\hat{z} = 5\hat{x} + 8\hat{y} + 9\hat{z}$$

c) Analogamente a quanto visto nel punto a) si ha

$$|\vec{V}_1 + \vec{V}_2| = \sqrt{5^2 + 8^2 + 9^2} = \sqrt{25 + 64 + 81} = \sqrt{170}$$

d) Il prodotto scalare è pari alla somma dei prodotti delle componenti omologhe:

$$\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = V_{1x}V_{2x} + V_{1y}V_{2y} + V_{1z}V_{2z} = 3 \cdot 2 + 5 \cdot 3 + 1 \cdot 8 = 6 + 15 + 8 = 29$$

e) L'angolo tra $\vec{V}_1$ e $\vec{V}_2$ può essere calcolato ricordando che
$\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = V_1 V_2 \cos\theta$ pertanto

$$\cos\theta = \frac{\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2}{V_1 V_2} = \frac{29}{\sqrt{35}\,\sqrt{77}} = \frac{29}{\sqrt{2695}} = 0.5586$$

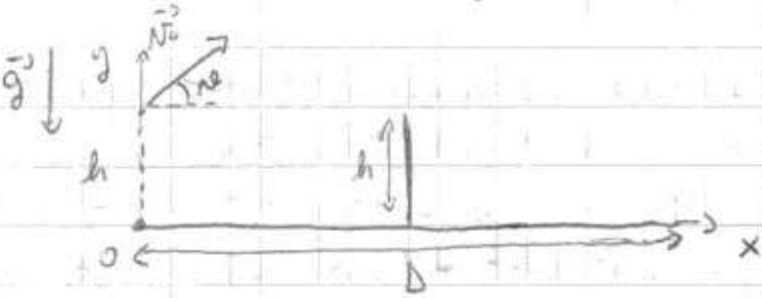
Da cui si ottiene $\vartheta = \arccos\left(\frac{29}{\sqrt{2695}}\right) = 56,04^\circ$

f) Il prodotto vettoriale tra $\vec{V}_1$ e $\vec{V}_2$ è dato da

$$\vec{V}_1 \times \vec{V}_2 = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ V_{1x} & V_{1y} & V_{1z} \\ V_{2x} & V_{2y} & V_{2z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 3 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 8 \end{vmatrix} = \hat{x}\left(5\cdot 8 - 1\cdot 3\right) - \hat{y}\left(3\cdot 8 - 1\cdot 2\right) + \hat{z}\left(3\cdot 3 - 5\cdot 2\right) =$$

$$= (40-3)\,\hat{x} - (24-2)\,\hat{y} + (9-10)\,\hat{z} = 37\hat{x} - 22\hat{y} + \hat{z}$$

Esercizio 2



a) Affinché la palla superi la rete è necessario che, nel riferimento in figura, la quota sia almeno h quando la x vale $\frac{D}{2}$.
Partendo dalla legge oraria si ha:

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + v_{0x}(t-t_0) = 0 + v_{0x}\,t = v_0\cos\vartheta\, t \quad \text{(avendo posto } t_0 = 0\text{)} \\ y(t) = y_0 + v_{0y}(t-t_0) + \frac{a_{0y}}{2}(t-t_0)^2 = h + v_0 \operatorname{sen}\vartheta\, t - \frac{g}{2}t^2 \end{cases}$$

Poiché trascurando la resistenza dell'aria, l'accelerazione è pari al $\vec{g}$, costante e verticale verso il basso.
Chiamato t_1 l'istante in cui la palla raggiunge la posizione della rete si ha:

$$\begin{cases} x(t_1) = \frac{D}{2} \iff v_0\cos\vartheta\, t_1 = \frac{D}{2} \iff t_1 = \frac{D}{2v_0\cos\vartheta} \\ y(t_1) \geq h \iff h + v_0\operatorname{sen}\vartheta\,\frac{D}{2v_0\cos\vartheta} - \frac{g}{2}\left(\frac{D}{2v_0\cos\vartheta}\right)^2 \geq h \end{cases}$$

Sviluppando la seconda equazione troviamo

$$h + \frac{D}{2}\frac{\operatorname{sen}\vartheta}{\cos\vartheta} - \frac{g}{2}\frac{D^2}{4v_0^2\cos^2\vartheta} \geq h \iff \frac{D\operatorname{sen}\vartheta\cdot 4v_0^2\cos^2\vartheta - gD^2}{8v_0^2\cos^2\vartheta} \geq 0$$

Dato che il denominatore è positivo si ha

$$4\cancel{D}\, v_0^2 \operatorname{sen}\vartheta\cos\vartheta - gD^2 \geq 0 \iff 2v_0^2\operatorname{sen}2\vartheta \geq gD \iff \frac{v_0^2\operatorname{sen}2\vartheta}{g} \geq \frac{D}{2}$$

La minima velocità si ottiene quando $\sin 2\vartheta = 1$, cioè per $\vartheta = 45°$ ed è pari a $v_{0_m}^2 = \frac{Dg}{2} \iff v_{0_m} = \sqrt{\frac{Dg}{2}} = \sqrt{88.29} = 9.396\ m s^{-1}$

Più semplicemente si poteva notare che, dato che la quota di partenza coincide con l'altezza della rete, la condizione che deve essere soddisfatta è che la gittata $\frac{v_0^2 \sin 2\vartheta}{g}$ (distanza percorsa in orizzontale tra l'istante di lancio e quello in cui la palla torna alla quota iniziale) sia almeno pari a $\frac{D}{2}$, trovando direttamente la condizione su v_0^2.

b) La palla cade nel campo avversario quando $y = 0$, pertanto (detto t_v l'istante in cui la palla tocca terra)

$$y(t_v) = 0 \iff h + v_0 \sin\vartheta\, t_v - \frac{g}{2} t_v^2 = 0 \iff -\frac{g}{2} t_v^2 + v_0 \sin\vartheta\, t_v + h = 0 \iff$$

$$\iff \frac{g}{2} t_v^2 - v_0 \sin\vartheta\, t_v - h = 0 \iff t_v = \frac{v_0 \sin\vartheta \pm \sqrt{v_0^2 \sin^2\vartheta + 2gh}}{g}$$

Delle due soluzioni quella cercata è quella ≥ 0, cioè (ricordando che $v_0 = 9.396\ m s^{-1}$ e $\vartheta = 45°$)

$$t_v = \frac{v_0 \sin\vartheta + \sqrt{v_0^2 \sin^2\vartheta + 2gh}}{g} = \frac{9.396 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{88.29 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot 9.81 \cdot 2.43}}{9.81} \iff$$

$\iff t_v = 1.654\ s$ da cui

$$x(t_v) = v_0 \cos\vartheta\, t_v = 9.396 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 1.654 = 10.99\ m$$

c) La quota è massima quando la componente verticale di $\vec{v}$ si annulla, cioè:

$$v_y(t_M) = 0 \iff v_0 \sin\vartheta - g t_M = 0 \iff t_M = \frac{v_0 \sin\vartheta}{g} = \frac{9.396}{9.81} \frac{\sqrt{2}}{2} \iff$$

$t_M = 0.677\ s$

La posizione della palla all'istante t_M è data da

$$x(t_M) = v_0 \cos\vartheta\, t_M = \frac{v_0^2 \sin\vartheta \cos\vartheta}{g} = \frac{88.29 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\sqrt{2}}{2}}{9.21} = 4.5\ m$$

$$y(t_M) = y_{max} = h + v_0 \sin\vartheta\, t_M - \frac{1}{2} g t_M^2 =$$

$$= h + \frac{v_0^2 \sin^2\vartheta}{2g} = 2.43 + \frac{88.29 \cdot \frac{1}{2}}{2 \cdot 9.81} = 4.68\ m$$

d) Il tempo di volo totale è stato calcolato al punto b) ed è pari a $t_v = 1.654$ s

e) La velocità con cui la palla tocca terra è data da

$$\begin{cases} v_x(t_v) = v_0 \cos\vartheta = 6.644 \ ms^{-1} \\ v_y(t_v) = v_0 \operatorname{sen}\vartheta - g t_v = -9.582 \ ms^{-1} \end{cases}$$

Da cui si ottiene $v = \sqrt{6.644^2 + (9.582)^2} = 11.660 \ ms^{-1}$

L'angolo con l'asse x è invece dato da:

$$\operatorname{tg}\vartheta = \frac{v_y}{v_x} \Leftrightarrow \vartheta = \operatorname{arctg}\left(\frac{v_y}{v_x}\right) = \operatorname{arctg}\left(-\frac{9.582}{6.644}\right) = -55.26^\circ$$

Esercizio 3

$$\alpha_z = -5t^2 + 2t + 3$$

a) La dipendenza dal tempo della velocità angolare si ottiene ricordando che:

$\omega_z(t) = \omega_{0z} + \int_{t_0}^{t} \alpha_z(t')\,dt'$ da cui si ottiene, essendo $\omega_{0z} = 0$ per $t = t_0 = 0$:

$$\omega_z(t) = \int_0^t (-5t'^2 + 2t' + 3)\,dt' = -\frac{5}{3}t^3 + t^2 + 3t \quad (rad\ s^{-1})$$

b) La dipendenza dal tempo dell'angolo di rotazione si ottiene da:

$\vartheta(t) = \vartheta_0 + \int_{t_0}^{t} \omega_z(t')\,dt'$ da cui ($\vartheta = 0$ per $t = t_0 = 0$)

$$\vartheta(t) = \int_0^t \left(-\frac{5}{3}t'^3 + t'^2 + 3t'\right) dt' = -\frac{5}{3}\frac{t^4}{4} + \frac{t^3}{3} + 3\frac{t^2}{2} = -\frac{5}{12}t^4 + \frac{t^3}{3} + \frac{3}{2}t^2 \ (rad)$$

c) Per definizione la velocità angolare media in un intervallo Δt è data da:

$$\omega_{z\,medio} = \frac{\Delta\vartheta}{\Delta t} = \frac{\vartheta(t_2) - \vartheta(t_1)}{t_2 - t_1} = (\vartheta(t_1) = 0,\ t_1 = 0) = \frac{\vartheta(2)}{2} =$$

$$= \left(-\frac{5}{12}2^4 + \frac{2^3}{3} + \frac{3}{2}2^2\right)\cdot\frac{1}{2} = \left(-\frac{5}{\cancel{12}_3}\cdot\cancel{16}^4 + \frac{8}{3} + 6\right)\frac{1}{2} = 1 \ rad\ s^{-1}$$

d) L'accelerazione tangenziale è data da

$$a_T = \alpha_2 R = \left(-5t^2+2t+3\right)\cdot 2 = -10t^2+4t+6 \quad (m\,s^{-2})$$

L'accelerazione centripeta è invece

$$a_N = \frac{v^2}{R} = \omega_2^2 R = 2\cdot\left(-\frac{5}{3}t^3+t^2+3t\right)^2$$

e) L'accelerazione tangenziale si annulla quando

$$a_T(t) = 0 \iff -10t^2+4t+6=0 \iff 10t^2-4t-6=0 \iff$$

$$\iff 5t^2-2t-3=0 \iff t = \frac{2\pm\sqrt{4+60}}{10} = \frac{2\pm\sqrt{64}}{10} = \begin{cases} 1\,s \\ -\frac{3}{5}\,s \end{cases}$$

Supponendo che il moto inizi in $t=0$ si accetta solo la soluzione positiva.

Esercizio 4.

a) b) Il legame tra velocità della barca rispetto a terra $\vec{v}_B$, la velocità della barca rispetto all'acqua $\vec{v}_{BA}$ e la velocità dell'acqua rispetto a terra $\vec{v}_A$ è: $\vec{v}_{BA} = \vec{v}_B - \vec{v}_A$

In un riferimento cartesiano xy come in figura, uguagliando le componenti analoghe, si ha (dato che $\vec{v}_B = v_B\hat{x}$ e $\vec{v}_A = v_A\hat{y}$)

$$\begin{cases} v_{BAy} = v_{By} - v_{Ay} = 0 - v_A = -v_A \\ v_{BAx} = v_{Bx} - v_{Ax} = v_B - 0 = v_B \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} v_{BAy} = -v_A = -v_{BA}\,\text{sen}\,\vartheta \iff \text{sen}\,\vartheta = \frac{v_A}{v_{BA}} = \frac{6}{10} \Rightarrow \vartheta = \arcsin 0.6 = 36.87^\circ \\ v_B = v_{BAx} = v_{BA}\cos\vartheta = 10\cdot\cos 36.87 = 8.0\ \text{Km/h} \end{cases}$$

Quindi $v_B = 8.0$ km/h parallela e concorde a $\hat{x}$ e la direzione di $\vec{v}_{BA}$ forma un angolo $\vartheta = 36.87^\circ$ con l'asse x

c) Nel riferimento solidale a Terra il moto è rettilineo uniforme lungo l'asse x, pertanto:

$$x_B(t) = v_B \cdot t \iff t = \frac{x_B(t)}{v_B} = \frac{2\ \text{km}}{8\ \text{km/h}} = 0.25\ \text{h}$$

d) In un riferimento solidale all'acqua e con assi orientati come x e y il moto è rettilineo uniforme sia lungo x' che lungo y', in particolare, ponendo $y_0'=0$ per $t_0=0$ si ha

$$y'_{BA}(t) = y'_{0\,BA} + v_{BA_y}(t-t_0) = 0 - v_A t = -6 \cdot \frac{1}{4} = -1.5\ \text{km}$$