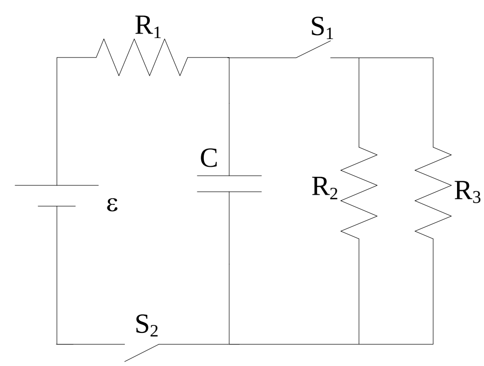
Università del Salento
Corso di Laurea Triennale in Ingegneria Industriale
Appello di **FISICA GENERALE 2** del 27/01/15

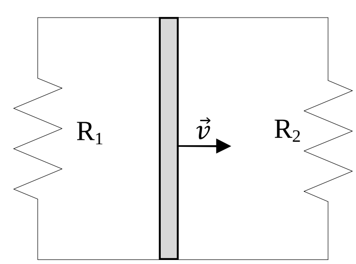
Esercizio 1 (9 punti): Una distribuzione di carica è costituita da un guscio sferico isolante uniformemente carico di raggio R_g=10.0 cm, con carica totale q=1.50 C, concentrico ad una sfera cava metallica, di raggio interno R_{1m}=20.0 cm e raggio esterno R_{2m}=30.0 cm, con carica totale Q=-1.50 C.
Si determini il campo elettrico totale a distanza dal centro della distribuzione pari a r_1=0.00 cm, r_2=15.00 cm, r_3=25.0 cm e r_4=35.0 cm.
Si determini inoltre il valore della carica totale distribuita sulla superficie interna della sfera cava metallica e su quella esterna.

Esercizio 2 (10 punti): Nel circuito in figura il condensatore è inizialmente scarico. All'istante t=0 s si chiude l'interruttore. Si determinino:
1) La carica sul condensatore in funzione del tempo.
2) La corrente nel circuito in funzione del tempo.
3) Il valore di regime della carica sul condensatore.
4) L'energia complessivamente erogata dalla batteria.
5) L'energia complessivamente dissipata sul resistore.
6) L'energia accumulata nel condensatore.
7) La costante di tempo del processo di scarica del condensatore se l'interruttore S_1 viene chiuso, aprendo nello stesso istante S_2.
R_1=10.0 Ω, R_2=50.0 Ω, R_3=50.0 Ω, C=10.0 μF, ε=15.0V



Esercizio 3 (6 punti): Due fili rettilinei e paralleli di lunghezza L=2.00 m, a distanza d=10.0 cm l'uno dall'altro, sono percorsi da corrente I_1= 0.500 A e I_2=1.50 A. Si determini la forza che il filo 1 esercita sul filo 2, specificando se la forza è attrattiva o repulsiva.

Esercizio 4 (7 punti):Una sbarretta uniforme di lunghezza L=10.0 cm scorre su due guide conduttrici senza attrito, a cui sono collegati due resistori come in Figura, di resistenza R_1=15.0 Ω, R_2=25.0 Ω. La sbarretta, sotto l'azione di una forza esterna, si muove con velocità costante pari a 1.00 ms^{-1}, in una regione in cui è presente un campo magnetico uniforme, perpendicolare uscente dal foglio e di intensità pari a 1.50 T. Si determinino:
1) Il valore della differenza di potenziale indotta ai capi della sbarretta, specificando quale terminale si trova a potenziale maggiore;
2) Le correnti indotte nelle due maglie;
3) Il valore della forza esterna necessaria a mantenere costante la velocità della sbarretta.



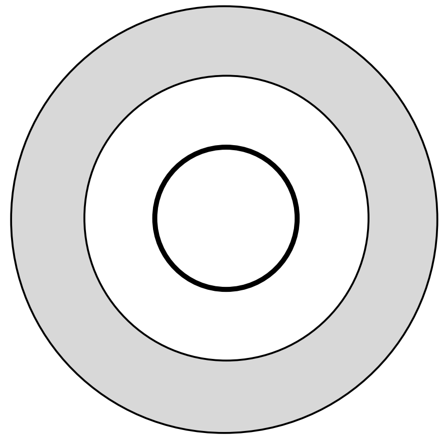
Teoria 1 (4 punti): Si dimostri che un dipolo elettrico $\vec{p}$ formato da due cariche puntiformi di valore $+q$ e $-q$ a distanza d, immerso in un campo elettrico uniforme $\vec{E}$ risente di una forza totale nulla e di un momento meccanico, rispetto al punto medio del segmento congiungente le due cariche, $\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E}$.

Teoria 2 (4 punti): Si enunci la Legge di Biot e Savart e la si applichi per calcolare il campo magnetico al centro di una spira circolare di raggio R percorso da corrente i.

Soluzione

Esercizio 1

La distribuzione di cariche è rappresentata in Figura (la linea scura rappresenta il guscio isolante, mentre la zona grigia la sfera cava metallica). Scegliendo un sistema di coordinate sferiche con centro nel centro comune delle due distribuzioni è immediato dimostrare che, per motivi di simmetria, il campo dipende dalla sola distanza dal centro, ed è diretto radialmente.



Applicando la Legge di Gauss con una superficie di integrazione sferica, concentrica alla distribuzione di carica, si determina la componente radiale del campo generato dal guscio isolante, pari a:

$$E_{rg}(r) = \begin{cases} 0 & r < R_g \\ \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q}{r^2} & r > R_g \end{cases}$$

Per quanto riguarda la sfera metallica, la carica è distribuita uniformemente per simmetria e si trova solo sulla superficie interna e su quella esterna (carica nulla nel volume), pertanto il campo è dato dalla sovrapposizione dei campi di due gusci sferici.

Indicando con Q_i la carica distribuita sulla superficie interna della sfera e con Q_e la carica sulla superficie esterna si ha:

$$E_{rmi}(r) = \begin{cases} 0 & r < R_{m1} \\ \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Q_i}{r^2} & r > R_{m1} \end{cases}$$

$$E_{rme}(r) = \begin{cases} 0 & r < R_{m2} \\ \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Q_e}{r^2} & r > R_{m2} \end{cases}$$

Complessivamente si ha:

$$E_r(r) = \begin{cases} 0 & r < R_g \\ \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q}{r^2} & R_g < r < R_{m1} \\ \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q+Q_i}{r^2} & R_{m1} < r < R_{m2} \\ \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q+Q_i+Q_e}{r^2} & r > R_{m2} \end{cases}$$

Inoltre, date le proprietà dei metalli in equilibrio, il campo totale all'interno della sfera metallica è nullo.

Da questa ultima osservazione si ricava immediatamente che Q_i=-q=-1.50 C.

Essendo poi Q_i+ Q_e=Q si trova Q_e=Q-Qi=0 C.

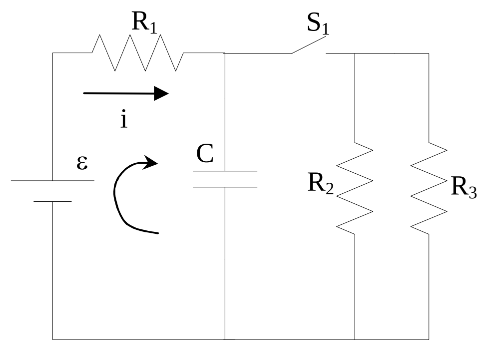
Sostituendo i valori numerici si trova infine:

$$E_r(r) = \begin{cases} 0 \quad r < 0.100\,m \\ \dfrac{1.35\ 10^{10}}{r^2} \quad 0.100\,m\ <\ r < 0.200\,m \\ 0 \quad 0.200\,m\ <\ r < 0.300\,m \\ 0 \quad r > 0.300\,m \end{cases}$$

Dei quattro punti assegnati il campo è diverso da zero solo nel punto 2, in cui la componente radiale vale $E_r(r_2) = 5.99\ 10^{11} N/C$

Esercizio 2

1) Durante la fase di carica la dipendenza dal tempo della carica sulle armature del condensatore si ottiene partendo dalle seconda Legge di Kirchhoff all'unica maglia presente.



Scegliendo un verso positivo della corrente orario, e percorrendo la maglia in verso orario si ha:

$$Ri + \frac{Q}{C} = \varepsilon$$

La carica accumulata sarà positiva sull'armatura superiore del condensatore e crescente nel tempo, e la corrente circolerà in verso orario, data la polarità della batteria. La relazione tra Q e i è pertanto:

$$i = \frac{dQ}{dt}$$

Sostituendo si ottiene:

$$R\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = \varepsilon$$

La cui soluzione è:

$$Q(t) = \varepsilon C\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)$$

Sostituendo i valori numerici si ha:

$$Q(t) = 1.50\ 10^{-4}\left(1 - e^{-10^4 t}\right)$$

Dove la carica è espressa in Coulomb.

2) La corrente si ottiene derivando rispetto al tempo la carica:

$$i(t) = \frac{dQ}{dt} = \frac{\varepsilon}{R}e^{-\frac{t}{RC}}$$

Sostituendo i valori numerici si ha:

$$i(t) = 1.50e^{-10^4 t}$$

Dove la corrente è espressa in Ampere.

3) Il valore di regime della carica è dato da:

$$Q_{max} = \lim_{t \to +\infty} Q(t) = C\varepsilon = 1.50\ 10^{-4}\ C$$

4) La potenza erogata dalla batteria, in ogni istante, è data dal prodotto tra tensione erogata dalla batteria e corrente che la attraversa $P_b(t) = \varepsilon i(t)$. L'energia erogata in un certo intervallo è l'integrale rispetto al tempo della potenza. Complessivamente l'energia erogata dalla batteria è quindi:

$$E_b = \int_0^{+\infty} \varepsilon i(t) dt = \int_0^{+\infty} \varepsilon \frac{\varepsilon}{R} e^{-\frac{t}{RC}} dt = C\varepsilon^2 = 2.25\ 10^{-3} J$$

5) La potenza istantanea dissipata sul resistore per effetto Joule è $P_R(t) = Ri^2(t)$, pertanto l'energia complessivamente dissipata è:

$$E_R = \int_0^{+\infty} Ri^2(t) dt = \int_0^{+\infty} R \frac{\varepsilon^2}{R^2} e^{-2\frac{t}{RC}} dt = \frac{\varepsilon^2}{R} \frac{RC}{2} = \frac{1}{2} C\varepsilon^2 = 1.12\ 10^{-3} J$$

6) L'energia accumulata nel condensatore è pari all'energia accumulata nel campo elettrico al suo interno alla fine del processo di carica. Poiché quando il condensatore è carico nel circuito non circola più corrente, ai capi della resistenza la caduta di potenziale è nulla, e la differenza di potenziale ai capi delle armature coincide con la forza elettromotrice della batteria, pertanto:

$$E_C = \frac{1}{2} C\varepsilon^2 = 1.12\ 10^{-3} J$$

I risultati ottenuti consentono di osservare che l'energia spesa dalla batteria nella fase di carica viene per metà accumulata nel condensatore, e per metà persa per effetto Joule (indipendentemente dai valori di R e C).

7) Se l'interruttore S_1 viene chiuso, aprendo simultaneamente S_2 il condensatore si scarica sul parallelo dei resistori di resistenza R_2 e R_3. La resistenza equivalente del parallelo è:

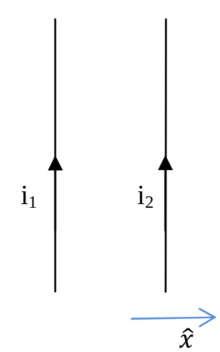
$$R_{eq} = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} = 25\ \Omega$$

La costante di tempo della scarica è pertanto:

$$\tau = R_{eq} C = 2.50\ 10^{-4} s$$

Esercizio 3

Con riferimento alla Figura calcoliamo la forza che il filo 1 esercita sul filo 2. Innanzitutto è necessario ricordare che la forza è dovuta alla forza di Lorentz che agisce sulle cariche in moto nel filo 2 a causa del campo magnetico generato dal filo 1. Il campo magnetico generato dal filo 1 ha linee di forza circolari con centro sul filo, pertanto nella regione in cui si trova il filo 2 è perpendicolare entrante nel foglio, e di modulo (facilmente determinabile dalla Legge di Ampere) pari a:



$$B = \frac{\mu_o i_1}{2\pi d}$$

La forza di cui risente il filo 2 è:

$$\vec{F} = i_2 \vec{L} \times \vec{B}$$

Dove $\vec{L}$ è un vettore di lunghezza pari a quella del filo, con direzione del filo e verso concorde alla corrente i_2. Eseguendo il prodotto vettoriale si trova:

$$\vec{F} = -\frac{\mu_o i_1 i_2}{2\pi d} L\hat{x}$$

La forza è pertanto attrattiva e di modulo pari a:

$$F = \frac{\mu_o i_1 i_2}{2\pi d} L = \frac{4\pi\ 10^{-7} 0.5\ 1.5}{2\pi 0.1} 2 = 3\ 10^{-6} N$$

Esercizio 4

1) Ai capi della sbarretta si induce una differenza di potenziale pari a:

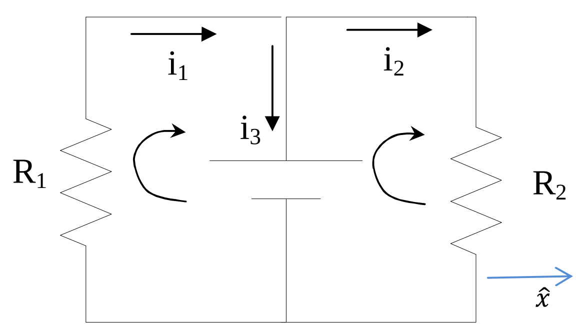
$$\Delta V = BvL = 0.150\ V$$

Per determinarne il segno è sufficiente ricordare che l'origine di questa differenza di potenziale è la forza di Lorentz agente sulle cariche in moto insieme al filo:

$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}.$

Per un portatore di carica positivo tale forza è diretta verso l'alto, e pertanto il terminale a potenziale maggiore sarà quello superiore.

2) Per la determinazione delle correnti è utile sostituire alla sbarretta una batteria che eroghi una forza elettromotrice pari a ΔV e con lo stesso segno. Il circuito è rappresentato in Figura.



Applicando la seconda Legge di Kirchhoff alla maglia con il resistore 1 e la batteria, e a quella con il resistore 2 e la batteria si ha:

$$R_1 i_1 = -\Delta V \Leftrightarrow i_1 = -\frac{\Delta V}{R_1} = -10.0\ mA$$

$$R_2 i_2 = \Delta V \Leftrightarrow i_2 = \frac{\Delta V}{R_2} = 6.00\ mA$$

3) Nella sbarretta circola una corrente determinabile dalla prima Legge di Kirchhoff applicata al nodo superiore:

$$i_1 = i_2 + i_3 \Rightarrow i_3 = i_1 - i_2 = -16.0\ mA$$

La corrente è pertanto in verso opposto a quello preso in Figura come positivo.

La presenza di una corrente indotta nella sbarretta causa la presenza di una forza pari a:

$$\vec{F} = |i_3| \vec{L} \times \vec{B} = -|i_3| LB\hat{x}$$

Per mantenere costante la velocità è necessario applicare una forza uguale e opposta, e pertanto parallela e concorde all'asse x e di modulo pari a:

$$F = |i_3| LB = 2.40\ 10^{-3} N$$