Corso di Laurea in Matematica A.A. 2017/2018
Corso di Fisica Generale 1
Prova scritta del 06/09/2018

Esercizio 1 (10 punti)

Un autotreno lungo 20 metri si muove di moto rettilineo uniforme a velocità $\vec{v}_o$ verso l'imbocco di una galleria. Quando l'autotreno di trova a 100 metri di distanza dalla galleria dalla montagna sovrastante di stacca un masso, che inizia a cadere in verticale da una quota h.

1) Supponendo che l'autista inizi a frenare nell'istante in cui il masso si stacca calcolare la minima decelerazione che consente all'autotreno di fermarsi senza essere colpito dal masso;

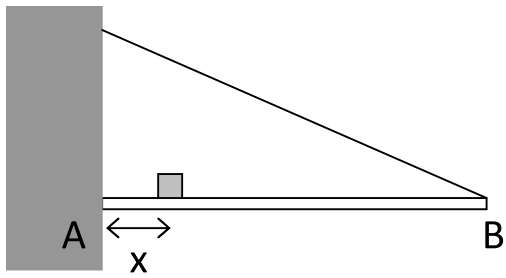
2) Supponendo al contrario che l'autista decida di accelerare, si calcoli l'accelerazione minima che consente all'autotreno di entrare completamente nella galleria prima che il masso cada.

v_o=15 ms^{-1} , h==100 m

Esercizio 2 (10 punti)

Una sbarretta sottile uniforme di massa M e lunghezza L è vincolata nell'estremo A da un vincolo liscio, e tenuta in posizione orizzontale da una corda attaccata all'estremo B di lunghezza 2 L.

Sulla sbarretta è appoggiata una particella puntiforme di massa m, a distanza x da A.



Si determinino:

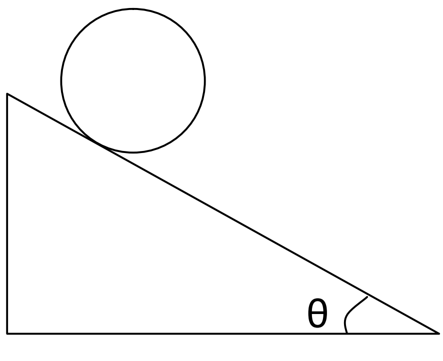
1) La forza vincolare in A e la tensione della corda in funzione di x;

2) Sapendo che la massima tensione esercitabile dalla corda senza rompersi è T_{MAX} si determini il massimo valore di x.

M=5.0 kg, L=2.0 m, m=0.2 kg, T_{MAX}=30 N.

Esercizio 3 (10 punti)

Un cilindro uniforme di massa M e raggio R può scendere lungo un piano inclinato scabro con coefficiente di attrito statico μ_s. Supponendo che il cilindro sia inizialmente in quiete e indicando l'angolo di inclinazione del piano rispetto all'orizzontale con θ:



1) Si determini il massimo valore θ_{max} di θ per cui è possibile il moto di puro rotolamento;

2) Per θ= 0.5 θ_{max} si determini la velocità del centro di massa e la velocità angolare di rotazione nell'istante in cui il centro di massa del cilindro ha percorso una distanza Δx lungo la sua direzione di moto rispetto all'istante iniziale.

M=5.0 kg, R=25 cm, μ_s=0.1 Δx=2.0 m

Esercizio 4 (10 punti)

Un corpo rigido è costituito da una sbarretta omogenea di lunghezza L=40 cm e massa m=500 g alla cui estremità è saldata una sfera omogenea di massa M=1 kg e raggio R=25 cm. Il corpo è vincolato a ruotare senza attrito in un piano verticale, intorno ad un asse passante per l'estremità superiore della sbarretta. Si determinino:

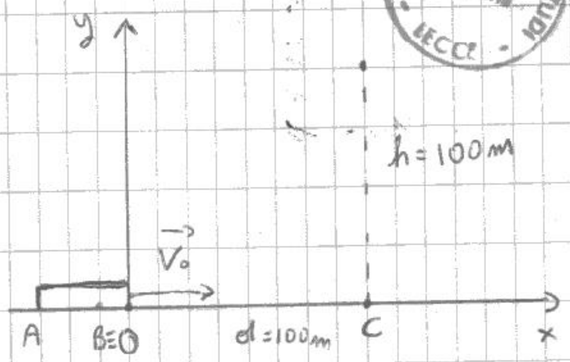
1) la posizione del centro di massa;

2) Il momento di inerzia del corpo rispetto all'asse di rotazione;

3) Il periodo delle piccole oscillazioni intorno alla posizione di equilibrio.

SOLUZIONE

ESERCIZIO 1



Fissiamo un riferimento cartesiano con asse x lungo la retta di moto dell'autotreno asse e verso concorde a quello di $\vec{v}_0$, e asse y verticale verso l'alto.

Fissiamo $t_0 = 0$ s nell'istante in cui il sasso si stacca e poniamo l'origine nell'estremo destro B dell'autotreno a $t = 0$.

Il moto di caduta del masso è uniformemente accelerato lungo l'asse y con legge oraria:

$$y_m = h - \frac{g}{2}t^2$$

Da cui si ricava che il masso raggiunge il suolo (nel punto C in figura) all'istante t_1 per cui $y_m(t_1) = 0 \iff t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g}} = 4.52$ s

Il moto dell'autotreno è uniformemente accelerato e la legge oraria dei due estremi A e B è data da

$$x_B(t) = v_{0x}t + \frac{a_x}{2}t^2$$

$$x_A(t) = -L + v_{0x}t + \frac{a_x}{2}t^2 \quad \text{con } L = \text{lunghezza autotreno}$$

Se l'autista frena (punto 1) si avrà $a_x \le 0$, mentre se accelera (caso 2) $a_x \ge 0$.

Prima di eseguire altri calcoli verifichiamo che sia necessario frenare o accelerare per evitare il masso determinando la posizione dell'estremo destro dell'autotreno B nell'istante in cui il masso raggiunge il suolo, in assenza di accelerazione (cioè per $a_x = 0$)

$$x_B(t_1)_{a_x=0} = v_{0x}t_1 = 67.8 \text{ m} < d$$

Quindi per $a_x = 0$ l'autotreno si troverebbe a $t = t_1$ ancora fuori dalla galleria con $v_x = v_{0x}$, e quindi colpirebbe successivamente il masso se tenesse $a_x = 0$.

Se invece avessimo trovato $x_A(t_1) > d$ all'istante in cui il masso raggiunge il suolo tutto l'autotreno avrebbe superato il punto C, evitando il masso anche per $a_x = 0$.

Per ~~colpa~~ evitare il masso quindi serve un'opportuna $a_x = 0$

Calcoliamola nei due casi:

1) L'AUTISTA FRENA

In tal caso l'autotreno evita il masso se si ferma prima che B raggiunga C. Calcoliamo l'istante t_2 in cui l'autotreno si ferma e poi poniamo $x_B(t_2) \le d$

$$v_x(t) = v_{0x} + a_x t \Rightarrow v_x(t_2) = 0 \Leftrightarrow t_2 = -\frac{v_{0x}}{a_x}.$$

La posizione di B in t_2 è data da

$$x_B(t_2) = v_{0x} t_2 + \frac{1}{2} a_x t_2^2 = -v_{0x}\frac{v_{0x}}{a_x} + \frac{1}{2} a_x \left(\frac{v_{0x}}{a_x}\right)^2 = -\frac{1}{2}\frac{v_{0x}^2}{a_x}$$

Ponendo ora $x_B(t_2) \le d$ si ha

$$-\frac{1}{2}\frac{v_{0x}^2}{a_x} \le d \Leftrightarrow \text{(ricordando che } a_x < 0\text{)} \quad a_x \le -\frac{1}{2}\frac{v_{0x}^2}{d} = -\frac{1}{2}\frac{225}{100} = -1.125\ ms^{-2}$$

Pertanto il minimo valore assoluto di accelerazione è $|a_x| = 1.125\ ms^{-2}$

2) L'AUTISTA ACCELERA

In tal caso $a_x \ge 0$ e l'autotreno evita il masso a condizione di essere entrato tutto nella galleria prima che il masso ~~cada~~ raggiunga il suolo. Affinché questo avvenga è sufficiente che A si trovi non prima di C a $t = t_1$, pertanto

$$x_A(t_1) \ge d \Leftrightarrow -L + v_{0x} t_1 + \frac{a_x}{2} t_1^2 \ge d \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a_x \ge (d + L - v_{0x} t_1)\frac{2}{t_1^2} = (120 - 67.8)\frac{2}{20.39} = 5.12\ ms^{-2}$$

Pertanto $a_{x\,min} = 5.12\ ms^{-2}$

ESERCIZIO 2

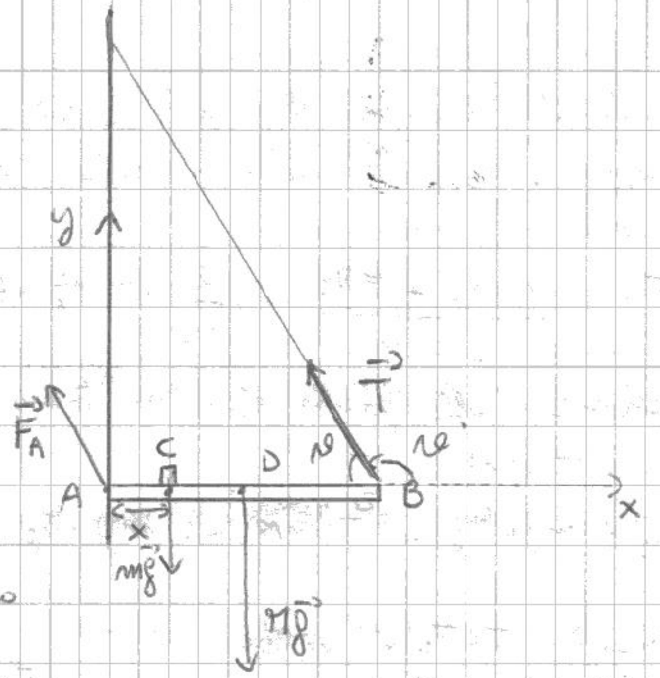
Le forze agenti sul sistema sono (vedi figura):

La forza vincolare in A $\vec{F}_A$;

il peso della particella puntiforme, $m\vec{g}$, applicato nel punto C;

il peso della sbarretta, $M\vec{g}$, applicato nel centro di massa della sbarretta (D);

la tensione della corda $\vec{T}$, diretta lungo la corda e applicata in B.



Affinché il sistema sia in equilibrio è necessario e sufficiente che la risultante delle forze (esterne) sia nulla, e che sia nullo il momento meccanico totale, rispetto ad un polo qualsiasi.

Ricordando che il momento di una forza è nullo se calcolato rispetto al suo punto di applicazione e notando che tra le due forze incognite, di $\vec{F}_A$ sono incogniti sia il modulo che la direzione e il verso, mentre di $\vec{T}$ è incognito solo il modulo, è conveniente calcolare i momenti rispetto ad A. In tal modo la forza $\vec{F}_A$ che è quella di cui sono incognite più proprietà, non comparirà nell'equazione $\vec{\tau}_{TOT} = \vec{0}$.

Le condizioni di equilibrio sono pertanto

$$\vec{F}^{EST}_{TOT} = \vec{0} \iff \vec{F}_A + m\vec{g} + M\vec{g} + \vec{T} = \vec{0}$$

$$\vec{\tau}_{A\,TOT} = \vec{0} \iff \vec{AA} \times \vec{F}_A + \vec{AC} \times m\vec{g} + \vec{AD} \times M\vec{g} + \vec{AB} \times \vec{T} = \vec{0}$$

Proiettando sugli assi in figura (con asse z perpendicolare al foglio e uscente) si ha:

$$\begin{cases} F_{Ax} - T\cos\vartheta = 0 \\ F_{Ay} - mg - Mg + T\sin\vartheta = 0 \\ -xmg - \frac{L}{2}Mg + TL\sin\vartheta = 0 \end{cases}$$

Notando che l'angolo ϑ è pari a 60°, dato che la lunghezza della corda è il doppio di quella della sbarretta, e che $\text{sen}\,\vartheta = \text{sen}\,\vartheta' = \frac{\sqrt{3}}{2}$ dalla terza equazione si ricava

$$T = \frac{x\,mg + \frac{L}{2}Mg}{L\,\text{sen}\,\vartheta'} = \frac{2}{\sqrt{3}L}\left(x\,mg + \frac{L}{2}Mg\right)$$

~~Sostituendo~~ Dalle prime due si trova

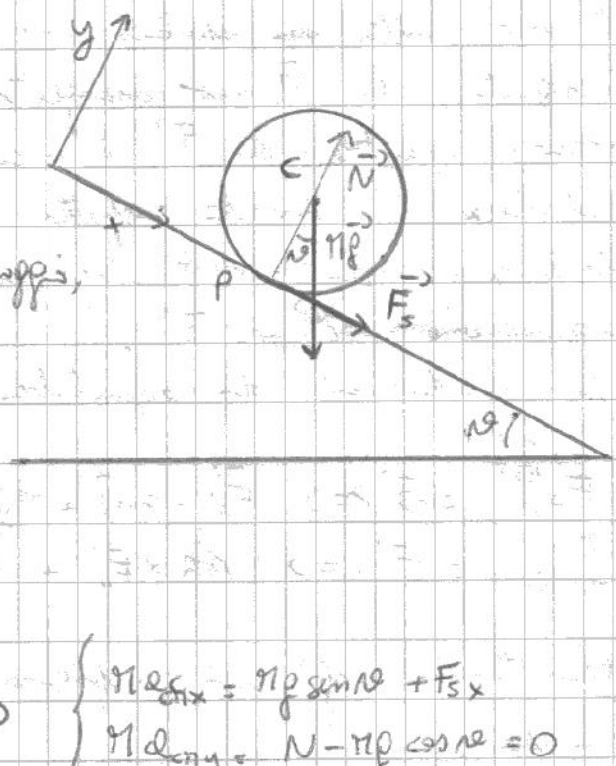
$$\begin{cases} F_{Ax} = T\cos\vartheta = \frac{T}{2} \\ F_{Ay} = mg + Mg - T\,\text{sen}\,\vartheta = mg + Mg - T\frac{\sqrt{3}}{2} = mg\left(1 + \frac{x}{L}\right) + \frac{3}{2}Mg \end{cases}$$

2) Ponendo $T \le T_{MAX}$ si ha

$$\frac{2}{\sqrt{3}L}\left(x\,mg + \frac{L}{2}Mg\right) \le T_{MAX} \iff x \le \left[\frac{\sqrt{3}\,L\,T_{MAX}}{2} - \frac{L}{2}Mg\right]\frac{1}{mg} =$$

$$= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 2\cdot 30 - \frac{2}{2}\cdot 5\cdot 9.81\right)\frac{1}{0.2\cdot 9.81} = 1.48\ m$$

Quindi $x_{MAX} = 1.48\ m$



ESERCIZIO 3

1) Le forze agenti sul cilindro sono:
La forza normale $\vec{N}$, esercitata dal piano d'appoggio, perpendicolare uscente dal piano,
la forza peso del cilindro, $M\vec{g}$, applicata nel centro di massa C,
la forza di attrito statico $\vec{F_s}$, diretta lungo il piano.
Le equazioni cardinali del moto sono

$$\begin{cases} M\vec{a}_{CM} = \vec{F}^{EST}_{TOT} = \vec{N} + M\vec{g} + \vec{F_s} \\ I_c\alpha_z = \tau^{TOT}_{cz} \end{cases} \iff \begin{cases} Ma_{CMx} = Mg\,\text{sen}\,\vartheta + F_{Sx} \\ Ma_{CMy} = N - Mg\cos\vartheta = 0 \\ I_c\alpha_z = RF_{Sx} \end{cases}$$

Inoltre la condizione di puro rotolamento impone l'uguaglianza

$$a_{CMx} = -\alpha_z R$$

Svolgendo i calcoli si trova:

$$\begin{cases} I_{C}\alpha_z = \frac{MR^2}{2}\alpha_z = RF_{Sx} \iff \alpha_z = \frac{2F_{Sx}}{MR} \\ N = Mg\cos\theta \\ Ma_{CMx} = -M\alpha_z R = -MR\cdot\frac{2F_{Sx}}{MR} = Mg\sin\theta + F_{Sx} \iff F_{Sx} = -\frac{Mg\sin\theta}{3} \end{cases}$$

Affinché il valore trovato per F_{Sx} sia ammissibile si deve avere $|\vec{F}_S| \le F_{SMAX} = \mu_S N$, da cui si ottiene

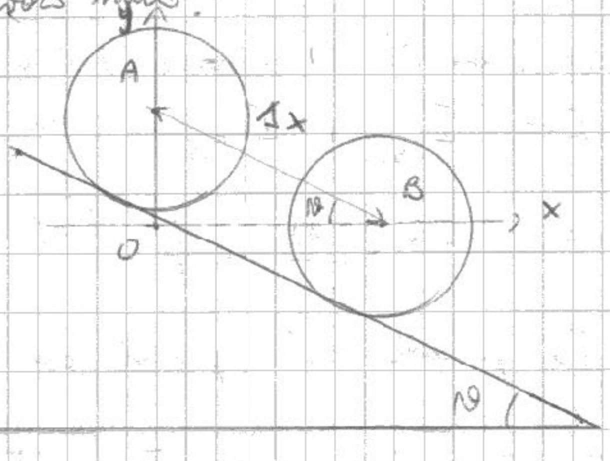
$$|\vec{F}_S| = |F_{Sx}| = \frac{Mg\sin\theta}{3} \le \mu_s Mg\cos\theta \iff tg\,\theta \le 3\mu_s \iff$$

$$\iff \theta \le arctg\, 3\mu_s = 16.7^\circ$$

2) $\theta = \frac{\theta_{MAX}}{2} = 8.35^\circ$

Durante il puro rotolamento si conserva l'energia meccanica, poiché il peso $M\vec{g}$ è conservativo, mentre $\vec{F}_S$ e $\vec{N}$ sono a lavoro nullo.

Chiamate A e B le posizioni iniziali e finali del centro di massa del cilindro e ricordando che il cilindro è inizialmente in quiete (cioè fermo) si ha



$E_A = E_B \iff \frac{1}{2}\cancel{Mv_{CMA}^2} +$

$$\iff \frac{1}{2}M\underbrace{v_{CM_A}^2}_{0} + \frac{1}{2}I_{CM}\underbrace{\omega_A^2}_{0} + Mgy_A = \frac{1}{2}Mv_{CM_B}^2 + \frac{1}{2}I_{CM}\omega_B^2 + Mgy_B$$

Dove y è la quota del centro di massa del cilindro rispetto ad un asse verticale verso l'alto. Ponendo $y_B = 0$ e osservando che $y_A = \Delta x \sin\theta$ si ha

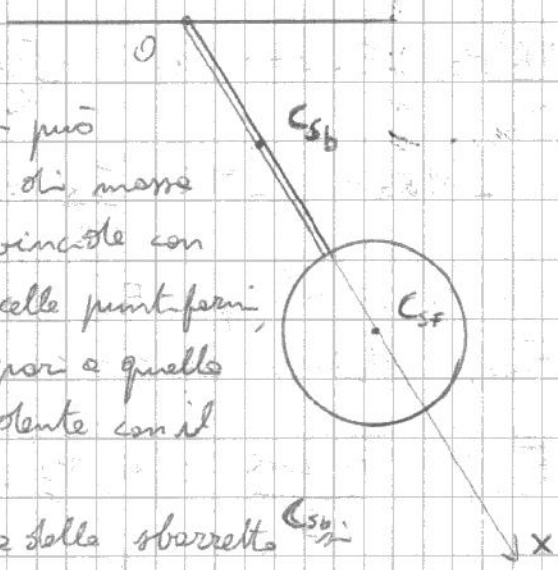
$$\frac{1}{2}Mv_{CMB}^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{MR^2}{2}\omega_B^2 = Mg\Delta x\sin\theta$$

. Essendo inoltre $v_{CM} = \omega R$ si ha

$$\frac{1}{2}Mv_{CMB}^2 + \frac{MR^2}{4}\cdot\frac{v_{CMB}^2}{R^2} = Mg\Delta x\sin\theta \iff v_{CMB} = \sqrt{\frac{4}{3}g\Delta x\sin\theta} = 1.95\ m\,s^{-1}$$

$$\omega_B = \frac{v_{CMB}}{R} = 7.80\ rad\ s^{-1}$$

ESERCIZIO 4



1) La posizione del centro di massa si può calcolare ricordando che il centro di massa di un sistema di corpi estesi coincide con quello di un sistema di particelle puntiformi, ognuna delle quali abbia massa pari a quella di un corpo e posizione coincidente con il suo centro di massa.
Considerato che il centro di massa della sbarretta C_{Sb} si trova nel suo centro di simmetria, quindi a distanza $\frac{L}{2}$ da O, mentre quello della sfera C_{SF} si trova nel centro della sfera, quindi a distanza $L+R$ da O si ha (rispetto all'asse x in figura)

$$X_{CM} = \frac{m\frac{L}{2} + M(L+R)}{m+M} = \frac{0.5\cdot\frac{0.4}{2} + 1\,(0.4+0.65)}{0.5+1.0} = 0.77\ m$$

2) Il momento di inerzia è una grandezza additiva pertanto

$$I_O = I_{SbO} + I_{SFO} \quad \text{con} \quad I_{SbO} = \frac{mL^2}{3} \quad \text{e} \quad I_{SFO} = \frac{2}{5}MR^2 + M(R+L)^2$$

$$I_O = 0.5\cdot\frac{(0.4)^2}{3} + \frac{2}{5}\cdot 1\cdot(0.25)^2 + 1\,(0.65)^2 = 0.47\ kg\,m^2$$

3) Il periodo delle piccole oscillazioni è

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I_O}{M_T\, g\, x_{CM}}} = 2\pi\sqrt{\frac{I_O}{(M+m)\, g\, x_{CM}}} = 1.28\ s$$